



(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه کنید)

(۱) آیا ممکن است که تمام خط‌های در صفحه را به گونه‌ای به جفت خط‌های متعامد دسته‌بندی کرد که هر خط فقط متعلق به یک جفت باشد؟ [۳ امتیاز]

(۲) الف) قالب پنیری داده شده است. شخصی می‌تواند عدد گنگ $a > 0$ را انتخاب کرده و قالب را به گونه‌ای ببرد که نسبت وزنی قطعات حاصل ۱ به a ببرد، سپس هر یک از قطعات حاصل را نیز با همان نسبت ببرد و به همین ترتیب ادامه دهد. آیا او می‌تواند این کار را به گونه‌ای انجام دهد که بعد از تعداد متناهی برش، همه قطعات را بتوان در دو دسته با وزن برابر جای داد؟ [۲ امتیاز]

ب) به همین مسئله برای یک عدد مثبت گویای $a \neq 1$ پاسخ دهید. [۲ امتیاز]

(۳) آیا می‌توان با تکرار استفاده از تابع‌های \arccot و $arctan$ ، $arccos$ ، $arcsin$ ، cot ، tan ، cos ، sin از تابع‌های \sin و \cos « $\sin \cos \arcsin \cos \sin$ » مجاز است. [۶ امتیاز]

(۴) ۵۰۰۰ علاقه‌مند به فیلم در یک همایش گرد هم آمده‌اند؛ هر علاقه‌مند حداقل یک فیلم دیده است. شرکت کنندگان باید به گروه‌هایی از دو نوع تقسیم شوند. در گروه نوع اول، همه اعضا باید فیلمی مشترک را دیده باشند. در گروه نوع دوم، هر عضو باید فیلمی را دیده باشد که هیچ عضو دیگر این گروه آن را ندیده باشد. ثابت کنید که می‌توان همه علاقه‌مندان را به دقیقاً ۱۰۰ گروه تقسیم کرد. (گروهی با یک نفر مجاز است: در این صورت این فرد گزارشی از فیلمی که دیده است می‌نویسد). [۶ امتیاز]

(۵) سی‌وسه سوارکار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت روی مسیری دایره‌ای حرکت می‌کنند. فقط یک نقطه در راه وجود دارد که یک سوارکار می‌تواند از دیگری سبقت بگیرد. آیا امکان دارد که آن‌ها به مدتی که به اندازه دلخواه طولانی است با سرعت‌های ثابت و دوه‌دو متمایز به سوارکاری خود ادامه دهند؟ [۷ امتیاز]

(۶) چهارضلعی $ABCD$ بر دایره‌ای به مرکز I محیط شده است. نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع AB و CD هستند. در ضمن، $IM/AB = IN/CD$. ثابت کنید $ABCD$ یک دوزنقه یا متوازی‌الاضلاع است؟ [۸ امتیاز]

(۷) یک عدد طبیعی داده شده است. می‌توان علامت‌های جمع را بین ارقام آن به صورت دلخواه قرار داد و حاصل جمع را محاسبه کرد (برای مثال، با شروع از ۱۲۳۴۵۶۷۸۹، فردی می‌تواند $۱۳۱۴ = ۱۲۳۴۵ + ۶ + ۷۸۹$ را به دست آورد). می‌توان همین کار را برای عدد صحیح به دست آمده نیز انجام داد و به همین ترتیب ادامه داد. ثابت کنید که با شروع از هر عدد طبیعی، می‌توان با حداکثر ۱۰ بار تکرار فرآیند شرح داده شده، به عدد صحیحی یک رقمی رسید. [۹ امتیاز]



(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

Points Problems

- 3 1. Is it possible to arrange all lines in the plane into pairs of perpendicular lines such that each line belongs to a single pair?
- 2 2. a) A piece of cheese is given. One may choose any irrational $a > 0$ and cut the piece with ratio of weights $1 : a$, then cut any of existing pieces with the same ratio and so on. Can one proceed so that after some finite number of cuts, all the cheese can be gathered into two piles with equal weights?
- 2 b) The same question for a positive rational $a \neq 1$.
- 6 3. Can one obtain the integer 2010 by repeated application of functions \sin , \cos , \tan , \cot , \arcsin , \arccos , \arctan , arccot to the integer 1? (Each function may be applied an arbitrary number of times, so that expressions like "sin cos arcsin cos sin" are allowed.)
- 6 4. 5000 movie fans gathered on a congress; each fan has seen at least one movie. The participants should be separated into groups of two kinds. In a group of 1st kind, all the members should have seen the same movie. In a group of 2nd kind, each member should have seen such a movie that no other member of this group have also seen it. Prove that it is possible to split all the fans into exactly 100 groups. (A group consisting of a single person is allowed: then this person writes a report about a film seen.)
- 7 5. Thirty three knights are riding along a circular road counterclockwise. There is a single point on the road where a knight may surpass another one. Is it possible that they ride for an arbitrarily long time with pairwise distinct constant speeds?
- 8 6. Quadrilateral $ABCD$ is circumscribed around a circle with centre I . Points M and N are the midpoints of sides AB and CD . Furthermore $IM/AB = IN/CD$. Prove that $ABCD$ is a trapezoid or a parallelogram.
- 9 7. A positive integer is given. One may place pluses between its digits in an arbitrary way and determine the resulting sum (for example, starting from 123456789 one may obtain $12345 + 6 + 789 = 13140$). One may apply the same procedure to the integer obtained and so on. Prove that starting from an arbitrary positive integer, one can obtain a single-digit integer after not more than 10 procedures described.