شماره گروه:

۱A

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2011

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۸۹

خانه ریاضیات

(لطفاً پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید)

۱) آیا شش‌ضلعی وجود دارد که بتوان آن را با یک خط راست به چهار مثلث هم‌نهشت (مساوی) تقسیم کرد؟ [۴ امتیاز]

۲) ۱۸۰ خط راست (شامل محورهای مختصات) از مرکز گذشته و صفحه را به زاویه‌هایی به اندازه 1° تقسیم می‌کنند. مجموع کل مختص اول (طول) نقاط برخورد این خط‌ها را با خط $y = 100 - x$ بیابید. [۴ امتیاز]

۳) «بارون منچ‌هاوسن» مجموعه‌ای از ۵۰ سکه دارد که وزن آن‌ها اعداد طبیعی متمایزی هستند که از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کنند، به طوری که مجموع وزن همه آن‌ها عددی زوج است. بارون ادعا می‌کند که امکان ندارد بتوان این سکه‌ها را در دو کفه ترازو طوری تقسیم کرد که کفه‌ها در تعادل باشند. آیا ممکن است که این ادعای بارون درست باشد؟ [۵ امتیاز]

۴) فرض کنید N عددی طبیعی باشد. ثابت کنید دو جفت از اعداد طبیعی وجود دارند، به طوری که مجموع اعداد در هر یک از این دو جفت برابر هستند، در حالی که نسبت حاصل‌ضرب اعداد در هر جفت برابر N باشد. [۶ امتیاز]

۵) فرض کنید AA_1 و BB_1 دو ارتفاع در مثلث حاده ABC باشند. از نقطه A_1 دو عمود بر خطوط AC و AB استخراج می‌کنیم، و از نقطه B_1 دو عمود بر خطوط BC و BA استخراج می‌کنیم. ثابت کنید پای این چهار عمود، تشکیل یک ذوزنقه متساوی‌الساقین می‌دهد. [۷ امتیاز]

۶) دو مورچه در مسیری بسته روی جدولی 7×7 حرکت می‌کنند. هر مورچه فقط در طول اضلاع ۴۹ مربع روی صفحه حرکت کرده و از همه ۶۴ رأس این مربع‌ها دقیقاً یک بار می‌گذرد. حداقل تعداد اضلاعی را بیابید که توسط هر دو مورچه طی شده‌اند. [۱۰ امتیاز]

۷) درون هر خانه از یک جدولِ مربعی عددی نوشته شده است، به طوری که مجموع بزرگ‌ترین دو عدد در هر سطر برابر a است، و مجموع بزرگ‌ترین دو عدد در هر ستون برابر b است. ثابت کنید $a = b$. [۱۰ امتیاز]

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2011

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۸۹

(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed.)

points	problems
4	1. Does there exist a hexagon that can be divided into four congruent triangles by a straight cut?
4	2. 180 straight lines (including the coordinate axes) passing through the origin divide the plane into $1°$ angles. Determine the total sum of the x-coordinates of the intersection points of these lines with the line $y = 100 - x$.
5	3. Baron Münchausen has a set of 50 coins whose masses are distinct positive integers not exceeding 100 and such that the total mass of all coins is an even number. Baron claims that it is impossible to distribute these coins between two sides of a balance to reach an equilibrium. Can it happen that baron's claim is true?
6	4. Let N be any positive integer. Prove that there exist two pairs of positive integers such that the sums of the numbers in both pairs are equal while the ratio of the corresponding products equals N.
7	5. Let AA_1 and BB_1 be two of the altitudes of acute triangle ABC. From point A_1 the perpendiculars are dropped to lines AC and AB and from point B_1 the perpendiculars are dropped to lines BC and BA. Prove that the four feet of these perpendiculars form an isosceles trapezoid.
10	6. Two ants travel along closed paths on a 7×7 square board. Each ant moves only along sides of the 49 square cells of the board, passes through each of the 64 vertices of the cells exactly once. What is the least possible number of sides covered by both ants?
10	7. In every cell of a square table a number is written so that the sum of the two largest numbers in each row equals a, while the sum of the two largest numbers in each column equals b. Prove that $a = b$.