



(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه کنید)

(۱) وجوه یک چندوجهی محدب از مثلث‌های متشابه تشکیل شده است. ثابت کنید که چند وجهی دارای دو جفت از وجه‌های مساوی است (یک جفت از وجه‌های مساوی، و یک جفت دیگر از وجه‌های مساوی).

[۳ امتیاز]

(۲) کرم بالغ یک متر طول دارد. اگر کرمی بالغ باشد، می‌توان آن را به دو قسمت (با نسبت طول دل‌خواه) تقسیم کرد، تا دو کرم جدید به وجود آیند. هر یک از آن‌ها بلافاصله با سرعت یک متر بر ساعت شروع به رشد می‌کند. وقتی طول کرمی یک متر می‌شود، رشد آن متوقف می‌شود و بالغ می‌گردد. آیا ممکن است از یک کرم بالغ در کم‌تر از یک ساعت، ۱۰ کرم بالغ به دست آورد؟ [۴ امتیاز]

(۳) ۱۰۰ سنگ سفید دور دایره‌ای گذاشته شده‌اند. عدد صحیح  $k$  به گونه‌ای داده شده است که  $۱ \leq k \leq ۵۰$ . در هر حرکت،  $k$  سنگ متوالی انتخاب می‌کنیم به طوری که سنگ ابتدایی و انتهایی سفید باشند، و آن دو سنگ را سیاه می‌کنیم. برای چه مقادیری از  $k$  می‌توان همه ۱۰۰ سنگ را بعد از انجام تعدادی حرکت مشابه آن‌چه گفته شد، سیاه کرد؟ [۴ امتیاز]

(۴) چهار عمود استخراج شده از چهار رأس به ضلع‌های مقابل در یک پنج‌ضلعی محدب در یک نقطه با هم برخورد می‌کنند. ثابت کنید که عمود استخراج شده مشابه از رأس پنجم نیز از این نقطه عبور می‌کند. [۵ امتیاز]

(۵) در یک کشور، ۱۰۰ شهر و تعدادی راه وجود دارد. هر راه دو شهر را به هم متصل می‌کند، و راه‌ها با یک‌دیگر برخورد نمی‌کنند. دسترسی از هر شهری به هر شهری با حرکت در طول راه‌ها ممکن است. ثابت کنید که می‌توان تعدادی از راه‌ها را اعلام کرد، به طوری که تعداد فردی راه اصلی از هر شهر عبور کند. [۵ امتیاز]



(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed.)

points    problems

- 3      1. The faces of a convex polyhedron are similar triangles. Prove that the polyhedron has two pairs of equal faces (a pair of equal faces and another pair of equal faces).
  
- 4      2. A grown-up worm is 1 meter long. If a worm is grown-up, one can dissect it into two parts (with an arbitrary ratio of lengths) so that two new worms arise. Each of them immediately starts to grow at a speed of one meter per hour. When the length of a worm reaches 1 meter, it stops growing and becomes grown-up. Is it possible to obtain 10 grown-up worms from a single grown-up worm less than in an hour?
  
- 4      3. Along a circle, 100 white stones are placed. An integer  $k$  is given such that  $1 \leq k \leq 50$ . At each move, we choose any  $k$  consecutive stones such that the first and the last stone are white, and we repaint these two stones black. For which  $k$  it is possible to make all 100 stones black in some number of such moves?
  
- 5      4. Four perpendiculars drawn from four vertices of a convex pentagon to the opposite sides meet at the same point. Prove that the analogous fifth perpendicular also passes through this point.
  
- 5      5. In a country, there are 100 towns and some number of roads. Each road connects two towns, and the roads don't intersect. It is possible to reach any town from any other town moving along the roads. Prove that it is possible to declare some roads as main roads so that an odd number of main roads goes from each town.