



(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه کنید)

(۱) ۲۰۱۰ کشتی موز، لیمو و آناناس از آمریکای جنوبی به روسیه حمل می کنند. تعداد موزها در هر کشتی برابر مجموع تعداد لیموها در کشتی های دیگر است، و تعداد لیموها در هر کشتی برابر مجموع تعداد آناناس های در کشتی های دیگر است. ثابت کنید تعداد کل میوه ها مضربی از ۳۱ است. [۳ امتیاز]

(۲) تابع $f(x)$ دارای این ویژگی است: هر خطی در صفحه xy تعداد نقاط مشترک برابری با نمودار $y=f(x)$ و سهمی $y=x^2$ دارد. ثابت کنید که $f(x)$ دقیقاً برابر x^2 است. [۴ امتیاز]

(۳) آیا ممکن است که وجوه یک هشت وجهی منتظم را با تعدادی شش ضلعی منتظم بپوشانیم بدون آن که جایی خالی بماند و یا شش ضلعی ها روی هم قرار بگیرند؟ (یک هشت وجهی منتظم دارای ۶ رأس است، همه وجوه مثلث های متساوی الاضلاع هستند و هر رأس به ۴ وجه تعلق دارد). [۵ امتیاز]

(۴) «بارون منچ هاوسن» پیشنهاد می کند که چند جمله ای غیر ثابت $P(x)$ را با ضرایب صحیح نامنفی انتخاب کنید، و تنها مقادیر $P(2)$ و $P(P(2))$ را به او بگویید. او ادعا می کند که از روی این اطلاعات می تواند چند جمله ای انتخاب شده را بسازد. آیا بارون اشتباه نمی کند؟ [۵ امتیاز]

(۵) سوزنی روی صفحه قرار دارد. می توان آن را حول هر یک از دو نقطه انتهایی اش 45° چرخاند. آیا ممکن است که بعد از تعدادی از این دوران ها، سوزن به جای اولش برگردد اما جای نقاط انتهایی آن عوض شده باشد؟ (سوزن را مانند یک پاره خط در نظر بگیرید). [۶ امتیاز]



(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed.)

points problems

- 3 1. 2010 ships deliver bananas, lemons and pineapples from South America to Russia. The number of bananas on each ship equals the number of lemons on the other ships altogether, and the number of lemons on each ship equals the number of pineapples on the other ships altogether. Prove that the total number of fruits is a multiple of 31.
- 4 2. A function $f(x)$ has the following feature: each line in the xy -plane has an equal number of common points with the graph $y = f(x)$ and with the parabola $y = x^2$. Prove that $f(x)$ is identically equal to x^2 .
- 5 3. Is it possible to cover the surface of a regular octahedron by several regular hexagons without gaps and overlaps? (A regular octahedron has 6 vertices, all facets are equilateral triangles, and each vertex belongs to 4 facets.)
- 5 4. Baron Muenchhausen suggests to choose a non-constant polynomial $P(x)$ with integer nonnegative coefficients and to let him know the values $P(2)$ and $P(P(2))$ only. He claims that from this data he always can restore the polynomial chosen. Isn't the baron wrong?
- 6 5. A needle lies on the plane. One can rotate it in 45° around any of its endpoints. Is it possible that after some number of such rotations the needle occupies the initial position but its endpoints are interchanged? (Consider the needle as a segment.)