International Mathematics
Tournament of Towns
Junior O level paper
Spring 2007

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح مبتدی ۱)
اسفند ۱۳۸۵

۱- با رسم پنج پاره‌خط راست (بدون برداشتن قلم از روی کاغذ) یک ستاره پنج‌پر ایجاد شده است که شامل پنج مثلث و یک پنج‌ضلعی است. معلوم شده که همه پنج مثلث مساویند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که پنج‌ضلعی منتظم است؟ (یعنی دارای اضلاع و زوایای برابر است). [۴ امتیاز]

۲- دو عدد ۲۰۰۷ رقمی روی تخته نوشته شده‌اند. معلوم شده است که می‌توان از هر یک از این اعداد، ۷ رقم به گونه‌ای حذف کرد که اعدادی مساوی به دست آید. در این صورت، ثابت کنید می‌توان ۷ رقم به هر یک از اعداد اولیه اضافه نمود تا اعداد برابری به دست آید. [۴ امتیاز]

۳- حداقل تعداد رخ‌هایی را تعیین کنید که اگر در یک صفحه شطرنجی ۸×۸ خانه‌ای قرار گیرند همه خانه‌های سفید تهدید شوند (یک خانه با رخ تهدید می‌شود اگر در سطر یا ستون شامل آن خانه، یک رخ باشد.) [۴ امتیاز]

۴- سه عدد حقیقی غیر صفر داده شده است. اگر این اعداد به هر ترتیبی به عنوان ضرایب معادله درجه دوم به کار روند هر یک از معادلات حاصل دارای یک ریشه حقیقی است. در این شرایط، آیا درست است که هر یک از این معادلات دارای یک ریشه مثبت است؟ [۴ امتیاز]

۵- الف) یک کلوچه به شکل مثلثی است که یک زاویه‌اش سه برابر زاویه دیگرش است. جعبه این کلوچه نیز به شکل همین مثلث است؛ با این تفاوت که متقارن محوری (آیینه‌ای) آن است. چگونه یک نفر می‌تواند کلوچه را به دو تکه به‌گونه‌ای ببرد که تکه‌ها بتوانند با هم و بدون برگرداندن، در جعبه قرار گیرند. [۱ امتیاز]
ب) همین مسئله را برای مثلثی با زاویه منفرجه حل کنید که زاویه منفرجه آن دو برابر یکی از زاویه‌های حاده آن باشد. [۴ امتیاز]
(شما می‌توانید کلوچه و جعبه آن را اشکالی مسطح در نظر بگیرید)

(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed. Points for each problem are shown in brackets [ ].)

1) Five straight line segments were drawn (without lifting the pencil off the paper) so as to obtain a five-pronged star, consisting of five triangles and one pentagon. It turned out that all five triangles were congruent. Does this imply that the pentagon is regular (i.e. has equal sides and equal angles)? [4 points]

2) Two 2007-digit numbers are written on the board. It is known that one can delete 7 digits in each of the numbers so as to obtain equal numbers. Prove that it is then possible to insert 7 digits into the original numbers so as to obtain equal numbers. [4 points]

3) What least number of rooks can be placed on an 8 by 8 chessboard so that the all the white squares are attacked. (A square is attacked by rook if the square is in the row or the column containing the rook.) [4 points]

4) Three nonzero real numbers are given. If they are written in any order as coefficients of a quadratic trinomial, then each of these trinomials has a real root. Is it true that in this case each of these trinomials has a positive root? [4 points]

5) a) A pie has the shape of a triangle one angle of which is three times bigger than another angle. The box for the pie has the shape of the same triangle, except that it is axially symmetric to it. How can one cut the pie in two pieces which can be placed together in the box without turning them over? [1 point]

   b) Same problem for an obtuse-angled triangle whose obtuse angle is twice bigger than one of the acute ones. [4 points]

   (You can think of the pie and the box as being plane figures.)