



۱- خانه‌های مربع‌شکل یک صفحه 9×9 به صورت شطرنجی رنگ‌آمیزی شده است (خانه‌های گوشه، سفید هستند). حداقل تعداد رخ‌هایی را تعیین کنید که اگر در صفحه قرار گیرند، همه خانه‌های سفید تهدید شوند. (یک خانه با رخ تهدید می‌شود اگر در سطر یا ستون شامل آن خانه، یک رخ باشد). [۳ امتیاز]

۲- چندجمله‌ای $x^3 + px^2 + qx + r$ دارای سه ریشه در بازه $(0, 2)$ است. ثابت کنید نامساوی $0 < p + q + r < 2$ برقرار است. [۴ امتیاز]

۳- یک خط راست در نقطه A بر دایره‌ای مماس است. نقطه B را روی این خط انتخاب می‌کنیم و پاره‌خط AB را حول مرکز دایره، به اندازه‌های زاویه‌ای دلخواه، دوران می‌دهیم تا پاره‌خط $A'B'$ به دست آید. ثابت کنید خطی که از نقاط تماس، A و A' ، می‌گذرد پاره‌خط BB' را نصف می‌کند. [۴ امتیاز]

۴- دنباله‌ای از صفرها و یک‌ها به این صورت ساخته می‌شود: در مکان k -ام صفر قرار داده می‌شود اگر مجموع ارقام عدد k زوج باشد و در غیر این صورت (یعنی اگر مجموع ارقام عدد k فرد باشد) یک قرار داده می‌شود. ثابت کنید این دنباله متناوب نیست. [۴ امتیاز]
(ابتدای این دنباله به شکل زیر است:

$(1010101101010101001\dots)$

یک دنباله را متناوب می‌نامیم اگر عدد طبیعی d وجود داشته باشد که هر دو جمله‌ای که اختلاف شماره مکان آن‌ها d باشد برابر باشند.

۵- الف) یک کلوچه به شکل مثلثی با زاویه منفرجه است که زاویه منفرجه آن دو برابر یکی از زاویه‌های حاده آن است. جعبه این کلوچه نیز به شکل همین مثلث است؛ با این تفاوت که متقارن محوری (آینه‌ای) آن است. چگونه یک نفر می‌تواند کلوچه را به دو تکه به‌گونه‌ای ببرد که تکه‌ها بتوانند با هم و بدون برگرداندن، در جعبه قرار گیرند. [۳ امتیاز]
ب) همان مسئله قسمت «الف» برای کلوچه مثلثی با زوایای 20° ، 30° و 130° . [۳ امتیاز]
(شما می‌توانید کلوچه و جعبه آن را اشکالی مسطح در نظر بگیرید)



(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed. Points for each problem are shown in brackets [].)

- 1) The little squares of a 9 by 9 board are alternatively painted black and white (the corner squares are white). What least number of rooks can be placed on the board so that the all the white squares are attacked. (A square is attacked by rook if the square is in the row or the column containing the rook.) [3 points]
- 2) The polynomial x^3+px^2+qx+r has three roots on the interval $(0;2)$. Prove that the following inequalities hold: $-2<p+q+r<0$. [4 points]
- 3) A straight line is tangent to a circle at point A. We choose a point B on the line and rotate segment AB around the center of the circle by some angle, obtaining segment A'B'. Prove that the line passing through the tangency points A and A' divides segment BB' into equal parts. [4 points]
- 4) A sequence of zeros and ones is constructed in the following way: at the k-th place we write zero if the sum of digits of k is even and one otherwise (i.e., if the sum of digits of k is odd). Prove that this sequence is not periodic. [4 points]

(Here is the beginning of this sequence:

101010101101010101001...)

A sequence is called periodic if there exists a natural number d such that any two terms whose numbers differ by d are equal.

- 5) a) A pie has the shape of an obtuse angled triangle whose obtuse angle is twice as big as one of the acute angles. The box for this pie has the shape of the same triangle, except it is axially symmetric to it. How can one cut the pie into two pieces that can be placed together in the box without turning them over? [3 points]
- b) Same problem for a triangular pie with angles 20° , 30° , 130° . [3 points]

(You can think of the pie and the box as being plane figures.)