



۱- فرض کنید N عددی طبیعی باشد. برای پیدا کردن نزدیک‌ترین عدد صحیح به \sqrt{N} ، مریم عدد a^2 را می‌یابد که نزدیک‌ترین عدد مربع کامل به N است. او فکر می‌کند که a عددی است که به دنبال آن بوده است. آیا روش او همیشه درست است؟ [۳ امتیاز]

۲- نقاط K, L, M, N به ترتیب روی اضلاع AB, BC, CD, DA از مربع $ABCD$ به ضلع واحد به گونه‌ای اختیار می‌شوند که KM موازی BC و DA باشد و LN موازی AB و CD باشد. محیط مثلث KBL برابر ۱ است. مساحت مثلث MND چقدر است؟ [۴ امتیاز]

۳- آرش ۲۰ عدد متوالی طبیعی را به ترتیبی دلخواه پشت سر هم می‌نویسد و عدد M را به دست می‌آورد. بابک ۲۱ عدد متوالی طبیعی را به ترتیبی دلخواه پشت سر هم می‌نویسد و عدد N را به دست می‌آورد. آیا $M = N$ می‌تواند رخ دهد؟ [۵ امتیاز]

۴- تعدادی از قطرهایی (که ممکن است متقاطع باشند) از یک n -ضلعی محدب به گونه‌ای رسم شده‌اند که تعداد سه یا بیش‌تری قطر در یک نقطه داخل n -ضلعی متقاطع نباشند. معلوم شده است که پس از این کار، n -ضلعی به تعدادی مثلث تقسیم شده است. حداکثر تعداد ممکن این مثلث‌ها چقدر است؟ [۶ امتیاز]

۵- همه تصاعدهای حسابی صعودی (متناهی) را بیابید که تنها از اعداد اول تشکیل شده باشند و دارای این خاصیت باشند که تعداد جملات تصاعد از قدر نسبت آن بیش‌تر باشد. [۷ امتیاز]

۶- اضلاع AB, BC, CD از چهارضلعی $ABCD$ مساویند. نقطه M وسط پاره‌خط AD است و زاویه \widehat{BMC} برابر 90° است. زاویه بین قطرهای $ABCD$ را بیابید. [۸ امتیاز]

۷- نادر یک دسته کارت ۵۲ تایی را بُر می‌زند و آن‌ها را دور یک دایره به گونه‌ای می‌چیند که روی کارت‌ها دیده شود و یک جای خالی دور دایره باقی بماند. علی، که در اتاق دیگری است و کارت‌ها را نمی‌بیند، یکی از کارت‌ها را نام می‌برد. اگر این کارت در کنار جای خالی بود، نادر، بدون این که به علی بگوید، کارت را به محل خالی می‌برد؛ در غیر این‌صورت هیچ تغییری رخ نمی‌دهد. سپس علی کارت دیگری را نام می‌برد و به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند تا زمانی که علی اعلام «توقف» کند.

(الف) آیا علی می‌تواند تضمین کند که وقتی او اعلام «توقف» می‌کند، هیچ کارتی در محل اولیه‌اش نباشد؟ [۵ امتیاز]

(ب) آیا علی می‌تواند تضمین کند که وقتی او اعلام «توقف» می‌کند، کارت مشخصی در کنار جای خالی نباشد؟ [۵ امتیاز]



(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed. Points for each problem are shown in brackets [].)

- 1) Let N be a positive integer. In order to find the integer closest to \sqrt{N} Mary finds a^2 , which is the closest perfect square to N ; she thinks that a is then the number she is looking for. Is she always correct? [3 points]
- 2) Points K, L, M and N are chosen, respectively, on sides AB, BC, CD and DA of the unit square $ABCD$ in such a way that KM is parallel to BC and DA and LN is parallel to AB and CD . The perimeter of triangle KBL is equal to 1. What is the area of triangle MND ? [4 points]
- 3) Anna wrote down 20 consecutive positive integers, one right after another, in arbitrary order; she obtained the number M . Bob wrote down 21 consecutive positive integers in arbitrary order; he obtained the number N . Can it happen that $M=N$? [5 points]
- 4) Several diagonals (possibly, intersecting each other) are drawn in a convex n -gon in such a way that three or more diagonals cannot intersect in one point inside the n -gon. It turned out that as the result, the n -gon is cut onto triangles. What is the maximum possible number of these triangles? [6 points]
- 5) Find all (finite) ascending arithmetic progressions, consisting only of prime numbers, with the following property: the number of terms in a progression is larger than the difference of that progression. [7 points]
- 6) Sides AB, BC and CD of quadrangle $ABCD$ are equal. M is the midpoint of AD and angle BMC equals 90° . Find the angle between the diagonals of $ABCD$. [8 points]
- 7) Nancy shuffles a deck of 52 cards and spreads the cards out in a circle face up, leaving one spot empty. Andy, who is in another room and does not see the cards, names a card. If this card is adjacent to the empty spot, Nancy moves the card to the empty spot, without telling Andy; otherwise nothing happens. Then Andy names another card and so on, as many times as he likes, until he says “stop”.
 - a) Can Andy guarantee that after he says “stop” no card is at the same spot as initially? [5 points]
 - b) Can Andy guarantee that after he says “stop” the queen of spades is not adjacent to the empty spot? [5 points]