| | |
|---|---|
| خانه ریاضیات اصفهان<br>مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۲)<br>اسفند ۱۳۸۵ | *International Mathematics*<br>**Tournament of Towns**<br>**Senior A-level paper**<br>Spring 2007 |

۱- نقاط $A$، $B$، $C$ و $D$ روی سهمی $y = x^{۲}$ به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که $AB$ و $CD$ روی محور $y$ها همدیگر را قطع می‌کنند. اگر طول نقاط $A$، $B$ و $C$ در دستگاه مختصات به ترتیب $a$، $b$ و $c$ باشند، طول نقطه $D$ را بیابید. [۳ امتیاز]

۲- یک شکل محدب $F$ دارای این خاصیت است: برای هر مثلث متساوی‌الاضلاع با طول ضلع ۱، انتقالی موازی (بردار انتقالی) وجود دارد که همه رئوس آن را به مرز $F$ می‌برد. آیا $F$ لازم است دایره باشد؟ [۵ امتیاز]

۳- فرض کنید $f(x)$ چندجمله‌ای از درجه غیرصفر باشد. آیا ممکن است تعداد جواب‌های $f(x) = a$ برای هر مقدار $a$، عددی زوج باشد؟ [۵ امتیاز]

۴- نادر یک دسته کارت ۵۲ تایی را بُر می‌زند و آن‌ها را دور یک دایره به گونه‌ای می‌چیند که روی کارت‌ها دیده شود و یک جای خالی دور دایره باقی بماند. علی، که در اتاق دیگری است و کارت‌ها را نمی‌بیند، یکی از کارت‌ها را نام می‌برد. اگر این کارت، کنار جای خالی بود، نادر، بدون این که به علی بگوید، کارت را به محل خالی می‌برد؛ در غیر این‌صورت هیچ تغییری رخ نمی‌دهد. سپس علی کارت دیگری را نام می‌برد و به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند تا زمانی که علی اعلام «توقف» کند.

الف) آیا علی می‌تواند تضمین کند که وقتی او اعلام «توقف» می‌کند، هیچ کارتی در محل اولیه‌اش نباشد؟ [۴ امتیاز]

ب) آیا علی می‌تواند تضمین کند که وقتی او اعلام «توقف» می‌کند، یک کارت مشخص در کنار جای خالی نباشد؟ [۴ امتیاز]

۵- یک هشت‌وجهی منتظم با طول یال ۱ را در نظر بگیرید. یک هرم با قاعده مربع و طول یال $\frac{۱}{۳}$ از هر رأس هشت‌وجهی ببرید. یک چندوجهی با وجه‌های ۶ ضلعی منتظم و مربع به دست می‌آید. آیا ممکن است فضا با تکرار این چندوجهی پر شود؟ [۸ امتیاز]

۶- عدد گنگ $a_۰$ را در بازه $\left(۰, \frac{۱}{۲}\right)$ اختیار کنید. سپس $a_۱$ را مینیمم $۲a_۰$ و $۱ - ۲a_۰$ تعریف کنید. به همین ترتیب $a_۲$ و ... را تعریف کنید.

الف) نشان دهید که برای بعضی $n$ها، $a_n < \frac{۳}{۱۶}$ است. [۴ امتیاز]

ب) آیا ممکن است $a_n > \frac{۷}{۴۰}$ برای همه $n$ها رخ دهد؟ [۴ امتیاز]

۷- نقطه $T$ به گونه‌ای است که همه اضلاع مثلث $ABC$ از $T$ با زاویه $۱۲۰^\circ$ دیده می‌شوند. ثابت کنید خطوطی که متقارن محوری $AT$، $BT$و $CT$ به ترتیب نسبت به $BC$، $CA$ و $AB$ هستند، در یک نقطه به هم می‌رسند. [۸ امتیاز]

(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed. Points for each problem are shown in brackets [ ].)

1) Points A, B, C, D on the parabola $y=x^2$ are such that AB and CD intersect on the y-axis. Find the x-coordinate of point D, if the x-coordinates of A, B and C are a, b, and c, respectively. [3 points]

2) A convex figure F has the following property: any equilateral triangle with side 1 has a parallel translation that takes all its vertices to the boundary of F. Is it true that F is necessarily a circle? [5 points]

3) Let f(x) be a polynomial of nonzero degree. Can it happen that equation f(x)=a has an even number of solutions for any value of a? [5 points]

4) Nancy shuffles a deck of 52 cards and spreads the cards out in a circle face up, leaving one spot empty. Andy, who is in another room and does not see the cards, names a card. If this card is adjacent to the empty spot, Nancy moves the card to the empty spot, without telling Andy; otherwise nothing happens. Then Andy names another card and so on, as many times as he likes, until he says "stop".

   a) Can Andy guarantee that after he says "stop" no card is at the same spot as initially? [4 points]

   b) Can Andy guarantee that after he says "stop" the queen of spades is not adjacent to the empty spot? [4 points]

5) Take a regular octahedron with edge 1. Cut off a pyramid with square base and edge of length 1/3 from the octahedron at each vertex. You get a polyhedron with regular hexagonal and square faces. Can the space be covered with copies of such a polyhedron? [8 points]

6) Take an irrational $a_0$ such that $0 < a_0 < 1/2$. Define $a_1$ as the minimum of $2a_0$ and $1-2a_0$. Similarly define $a_2$ and so on.

   a) Show that $a_n < 3/16$ for some n. [4 points]

   b) Can it happen that $a_n > 7/40$ for all n? [4 points]

7) Point T is such that all three sides of triangle ABC are seen from T under the angle 120°. Prove that lines symmetric to AT, BT and CT with respect to BC, CA and AB, respectively, are concurrent. [8 points]